Univerzitet u Zenici
Filozofski fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 16.06.2014.

Linearna algebra, pismeni ispit

1. U prostoru svih realnih nizova $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ($\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, a_{n+1}, ...) \mid a_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\}$) zadan je skup

$$\mathcal{L} = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid a_{n+2} - 2a_n = 0, n \in \mathbb{N}\}.$$

Dokazati da je $\mathcal{L}$ potprostor od $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ i odrediti mu bazu i dimenziju.

2. Diskutovati za koje vrijednosti parametra a i b će vektor $(4, 3, 2, 1)^\top \in \mathbb{R}$ pripadati $\operatorname{im}(A)$ ako je

$$A = \begin{bmatrix} a & -1 & 0 & 0 \\ a & b & -1 & 0 \\ a & 0 & b & -1 \\ a & 0 & 0 & b \end{bmatrix}.$$

3. U unitarnom prostoru $\mathcal{P}_3 = \{at^3 + bt^2 + ct + d \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ polinoma stepena ≤ 3 sa unutrašnjim proizvodom

$$\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)\,\mathrm{d}t$$

dat je potprostor $\mathcal{M} = \operatorname{span}\{t, 1 + t\}$. Odrediti ortogonalnu projekciju polinoma $r(t) = -5t^3 - 12t^2 + 6t + 6$ na potprostor $\mathcal{M}$.

4. Odrediti svojstvene vrijednosti, svojstvene prostore, te algebarske i geometriske višestrukosti matrice A, pri čemu je

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Važno: Ovaj papir treba predati zajedno s rješenjima zadataka! Svaku formulu koju mislite koristit, u sva 4 zadatka, obavezno napisati, kao i značenja simbola iz formule. Ispit pisati isključivo hemiskom olovkom plave ili crne tinte. Prije rješenja prepisati postavku (tekst) zadatka.

Zadaci su skinuti sa stranice ff.unze.ba/nabokov.
Za uočene greške pisati na *infoarrt@gmail.com*

(#) U prostoru svih realnih nizova $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ($\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots) \mid a_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\}$) zadan je skup

$$\mathcal{L} = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid a_{n+2} - 2a_n = 0,\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Dokazati da je $\mathcal{L}$ potprostor od $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ i odrediti mu bazu i dimenziju.

Rj. Da bi pokazali da je $\mathcal{L}$ podprostor od $\mathbb{R}^n$ potrebno je i dovoljno pokazati da je $\mathcal{L}$ neprazan skup i da vrijede

(A1) $(a_n) \in \mathcal{L},\ (b_n) \in \mathcal{L} \Rightarrow (a_n) + (b_n) \in \mathcal{L}$

(M1) $(a_n) \in \mathcal{L} \Rightarrow \alpha(a_n) \in \mathcal{L}$ za $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

Primjetimo da je $(0, 0, 0, \ldots, 0, 0, \ldots) = (0)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{L}$ pa je $\mathcal{L}$ neprazan.
Izaberimo dva proizvoljna niza $(a_n), (b_n) \in \mathcal{L}$ (tada $a_{n+2} - 2a_n = 0$ i $b_{n+2} - 2b_n = 0$)

$$(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

$$a_{n+2} + b_{n+2} - 2(a_n + b_n) = a_{n+2} - 2a_n + b_{n+2} - 2b_n = 0$$

$\Rightarrow (a_n) + (b_n) \in \mathcal{L} \Rightarrow$ vrijedi A1

Za proizvoljan $\alpha \in \mathbb{R}$ $\quad \alpha(a_n) = (\alpha a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\alpha a_{n+2} - 2\alpha a_n = \alpha(a_{n+2} - 2a_n) = 0 \Rightarrow \text{vrijedi M1}$$

Da bi odredili bazu i dimenziju prostora $\mathcal{L}$, posmatrajmo prvo lakšu verziju zadatka tj. posmatrajmo nizove dimenzije 3, 4 i n.

$$\mathcal{L}_3 = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \mid a_3 - 2a_1 = 0\} = \left\{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = 0\right\}$$

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \text{rang}\, A = \text{rang}\, \bar{A} = 1 < 3$$

2 promjenjive uzimamo proizvoljno

$a_1 = t,\ a_2 = s$

$$\mathcal{L}_3 = \{(t, s, 2t) \in \mathbb{R}^3 \mid s, t \in \mathbb{R}\} = \text{span}\{(1,0,2), (0,1,0)\}$$

$\dim(\mathcal{L}_3) = 2$

$$\mathcal{L}_4 = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4 \mid a_3 - 2a_1 = 0,\ a_4 - 2a_2 = 0\} =$$

$$= \left\{(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \right\}$$

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \text{rang}\, A = \text{rang}\, \bar{A} = 2 < 4$$

2 promjenjive uzimamo proizvoljno

$a_1 = t,\ a_2 = s$

$$\mathcal{L}_4 = \{(t, s, 2t, 2s) \mid s, t \in \mathbb{R}\} = \text{span}\{(1,0,2,0), (0,1,0,2)\}$$

$\dim(\mathcal{L}_4) = 3$

$$\mathcal{L}_n = \{(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_3 - 2a_1 = 0,\ a_4 - 2a_2 = 0,\ a_5 - 2a_3 = 0, \dots, a_n - 2a_{n-2} = 0\}$$

$$= \left\{(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \mathbf{0} \right\}$$

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{ccccccccc|c} -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \text{rang}\, A = \text{rang}\, \bar{A} = n - 2 < n$$

2 promjenjive uzimamo proizvoljno

$\underline{a_1 = s},\ a_2 = t,\ \underline{a_3 = 2s},\ a_4 = 2t,\ \underline{a_5 = 4s},\ a_6 = 4t, \dots,\ a_{2k+1} = 2^k s,\ a_{2k} = 2^k t, \dots$

Sad matematičkom indukcijom nije teško pokazati da je $\dim(\mathcal{L}) = 2$, a da je baza za $\mathcal{L}$

$$\{(1,0,2,0,4,0,8,\dots), (0,1,0,2,0,4,0,8,\dots)\}.$$

(#) Diskutovati za koje vrijednosti parametra a i b će vektor $(4,3,2,1)^T \in \mathbb{R}$ pripadati $im(A)$ ako je

$$A = \begin{bmatrix} a & -1 & 0 & 0 \\ a & b & -1 & 0 \\ a & 0 & b & -1 \\ a & 0 & 0 & b \end{bmatrix}.$$

Rj. $im(A) := \{Ax \mid x \in \mathbb{R}^n\}$ = prostor generisan pomoću kolona matrice A

Primjetimo da će $b \in \mathbb{R}^4$ pripadati $im(A)$ akko se vektor b može izraziti kao linearna kombinacija kolona matrice A. Drugim riječima $b \in im(A)$ akko sistem $Ax = b$ ima bar jedno rješenje.

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} a & -1 & 0 & 0 & 4 \\ a & b & -1 & 0 & 3 \\ a & 0 & b & -1 & 2 \\ a & 0 & 0 & b & 1 \end{array}\right] \underset{II_v - I_v}{\overset{IV_v - III_v \atop III_v - II_v}{\sim}} \left[\begin{array}{cccc|c} a & -1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & b+1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -b & b+1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -b & b+1 & -1 \end{array}\right] \overset{II_v + III_v \atop III_v + IV_v}{\sim}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} a & -1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & b & -1 & -2 \\ 0 & -b & 1 & b & -2 \\ 0 & 0 & -b & b+1 & -1 \end{array}\right]$$

Prije nego što nastavimo dalje podjelimo problem na dva dijela: slučaj kada je $a=0$ i slučaj kada je $a \neq 0$

1° $a=0$.

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & b & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & b & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & b & 1 \end{array}\right]$$

Odavde odmah vidimo da za $b=0$ dati vektor ne pripada $im(A)$. Razmotrimo slučaj kada je $b \neq 0$

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & b & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & b & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & b & 1 \end{array}\right] \underset{b \neq 0}{\overset{II_v + I_v \cdot b}{\sim}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 3+4b \\ 0 & 0 & b & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & b & 1 \end{array}\right] \overset{III_v + II_v \cdot b}{\sim}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 3+4b \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2+3b+4b^2 \\ 0 & 0 & 0 & b & 1 \end{array}\right] \overset{IV_v + III_v \cdot b}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 3+4b \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2+3b+4b^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+2b+3b^2+4b^3 \end{array}\right]$$

Odavde vidimo da ako postoji b t.d. $1+2b+3b^2+4b^3=0$ vrijedi $(4,3,2,1)^T \in im(A)$. Za ostale b-ove vektor ne pripada $im(A)$.

2° $a \neq 0$

$$\bar{A} \sim .. \sim \left[\begin{array}{cccc|c} a & -1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & b & -1 & -2 \\ 0 & -b & 1 & b & -2 \\ 0 & 0 & -b & b+1 & -1 \end{array}\right] \overset{III_v + II_v \cdot b}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} a & -1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & b & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1+b^2 & 0 & -2-2b \\ 0 & 0 & -b & b+1 & -1 \end{array}\right] \overset{III_v + IV_v \cdot b}{\sim}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} a & -1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & b & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & b^2+b & -2-3b \\ 0 & 0 & -b & b+1 & -1 \end{array}\right] \overset{IV_v + III_v \cdot b}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} a & -1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & b & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & b(b+1) & -2-3b \\ 0 & 0 & 0 & \underbrace{b^3+b^2+b+1}_{(b^2+1)(b+1)} & -3b^2-2b-1 \end{array}\right]$$

Odavde vidimo da za $b=-1$ sistem nema rješenja, dok $b \neq -1$ sistem ima jedinstveno rješenje.

Zaključak

1° $a=0$ (a) $b=0$ $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \notin im(A)$

(b) b je korijen od $4x^3+3x^2+2x+1=0$, $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in im(A)$
a za sve ostale b-ove $(4,3,2,1) \notin im(A)$.

2° $a \neq 0$ (a) $b=-1$ $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \notin im(A)$

(b) $b \neq -1$ $(4,3,2,1) \in im(A)$

\# U unitarnom prostoru $\mathcal{P}_3 = \{at^3+bt^2+ct+d \mid a,b,c,d \in \mathbb{R}\}$ polinoma stepena ≤ 3 sa unutrašnjim proizvodom

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(t)\, q(t)\, dt$$

dan je potprostor $M = \operatorname{span}\{t, 1+t\}$. Odrediti ortogonalnu projekciju polinoma $r(t) = -5t^3 - 12t^2 + 6t + 6$ na potprostor M.

R: Da bi odredili ortogonalnu projekciju na M, potrebno je prvo pronaći bazu za $M^{\perp}$.

$$\underline{M^{\perp} = \{h \in \mathcal{P}_3 \mid \langle h, p \rangle = 0,\ p \in M\}}$$

Pa neka je $h(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$. Odredimo koeficijente a, b, c, d tako da $\langle h, p_1 \rangle = 0$ i $\langle h, p_2 \rangle = 0$ gdje su $p_1(t) = t$, $p_2(t) = 1+t$.

$$\langle h, p_1 \rangle = \int_{-1}^{1} (at^3+bt^2+ct+d) \cdot t\, dt = \ldots = \frac{2}{5}a + \frac{2}{3}c$$

$$\langle h, p_2 \rangle = \int_{-1}^{1} (at^3+bt^2+ct+d)(1+t)\, dt = \ldots = \frac{2}{5}a + \frac{2}{3}b + \frac{2}{3}c + 2d$$

Rješimo sad sistem
$$\begin{aligned} \frac{2}{5}a + \frac{2}{3}b + \frac{2}{3}c + 2d &= 0 \\ \frac{2}{5}a \qquad\quad + \frac{2}{3}c \qquad\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} \frac{2}{5} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 2 & 0 \\ \frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

$\Rightarrow$ Dvije promjenjive uzimamo proizvoljno npr. $c=s$, $d=u$, $s,u\in\mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3}s \\ -3u \\ s \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u, \quad s,u\in\mathbb{R}$$

Time smo dobili da je $M^{\perp} = \operatorname{span}\{-\frac{5}{3}t^3+t, -3t^2+1\}$

Sad nije teško vidjeti da je

$$\underbrace{1\cdot t + 2(1+t)}_{\in M} + \overbrace{3\cdot\left(-\frac{5}{3}t^3+t\right) + 4\left(-3t^2+1\right)}^{\in M^{\perp}} =$$
$$= -5t^3 - 12t^2 + 6t + 6$$

na osnovu čega možemo zaključiti da je ortogonalna projekcija $g(t)$ datog polinoma $r(t)$ na podprostor M

$$g(t) = 2+3t.$$

(#) Odrediti svojstvene vrijednosti, svojstvene prostore, te algebarske i geometrijske višestrukosti matrice A, pri čemu je

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Rj: Prisjetimo se:

Svojstvena vrijednost matrice A je skalar λ takav da je $Av=\lambda v$ za neki nenula vektor $v\in\mathbb{R}^n$.

$$Av=\lambda v$$

$$Av-\lambda v=0$$

$$(A-\lambda I)v=0 \quad \Rightarrow \quad \det(A-\lambda I)=0$$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5-\lambda & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} \overset{I_k+(II_k+III_k+IV_k)}{=\!=} \begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 & 0 & 2 \\ 1-\lambda & -5-\lambda & -2 & 4 \\ 1-\lambda & 0 & 3-\lambda & -2 \\ 1-\lambda & 0 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$=(1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & -4 & 0 & 2 \\ 1 & -5-\lambda & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 3-\lambda & -2 \\ 1 & 0 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} \underset{IV_v-I_v}{\overset{\substack{II_v-I_v \\ III_v-I_v}}{=\!=}} (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & -4 & 0 & 2 \\ 0 & -1-\lambda & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 3-\lambda & -4 \\ 0 & 4 & 2 & -3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 & 2 \\ 4 & 3-\lambda & -4 \\ 4 & 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} \overset{II_v-III_v}{=\!=} (1-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & -(1-\lambda) \\ 4 & 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$=(1-\lambda)^2\begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} \overset{II_k+III_k}{=\!=} (1-\lambda)^2\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 4 & -1-\lambda & -3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)^2 (1+\lambda) \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 (1+\lambda)^2$$

Svojstvene vrijednosti su $\lambda_1 = -1$ i $\lambda_2 = 1$.

Prisjetimo se:

Karakteristični polinom matrice $A \in Mat_{n \times n}(\mathbb{R})$ je $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$. Algebarska višestrukost od λ je broj koji predstavlja koliko se puta λ pojavljuje kao korijen karakterističnog polinoma matrice A.

Algebarska višestrukost od $\lambda_1 = -1$ je 2, a algebarska višestrukost od $\lambda_2 = 1$ je 2.

Vektorski prostor $\mathcal{E}_\lambda = \ker(A - \lambda I) := \{x \mid (A - \lambda I)x = 0\}$ se naziva svojstveni prostor matrice A.

Odredimo svojstvene vektore matrice A.

$\lambda_1 = -1$

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & -4 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & -4 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \text{1 prom. uzimamo proizv.}$$

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ s \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; s \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathcal{E}_{-1} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$\lambda_2 = 1$

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -4 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & -6 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \text{1 promj. uzim. proizv.}$$

$$v=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}s\\s\\s\\s\end{pmatrix},\ s\in\mathbb{R} \Rightarrow \quad \mathcal{E}_1=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

Traženi svojstveni prostori su $\mathcal{E}_{-1}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$ i $\mathcal{E}_1=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$.

Na kraju prisjetimo se:

<u>Geometrijska višestrukost od λ je $\dim\ker(A-\lambda I)$. Tj. $\dim(\mathcal{E}_\lambda)$.</u>

Geometrijske višestrukosti za obe svojstvene vrijednosti iznosi 1.